General Case

Inversion Lemma:

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$$

$$LHS\ (A + BCD) = I$$

$$RHS\ (A + BCD) = [A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}](A + BCD)$$

$$= I + A^{-1}BCD - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}D - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}BCD$$

$$(RHS)(A + BCD) = I + A^{-1}B\{I - (C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}C^{-1} - (C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}B\}CD$$

$$RHS\ (A + BCD) = I + A^{-1}B\{(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}[C^{-1} + DA^{-1}B - C^{-1} - DA^{-1}B]\}CD$$

$\Rightarrow$ A_{inv} is a valid Left inverse

provided A & C are non-singular

and $(CC^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}$ exists